

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

ΠΡΟΧΕΙΡΗ ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ 9

ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΕΣ: Ν. Μαρμαρίδης - Α. Μπεληγιάννης

ΒΟΗΘΟΙ ΑΣΚΗΣΕΩΝ: Χ. Ψαρουδάκης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ :

<http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII/LAll.html>

20 - 6 - 2012

Άσκηση 1. *Να βρεθούν οι κύριοι άξονες της τετραγωνικής μορφής*

$$q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad q(x, y, z) = xy + yz$$

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

ΠΡΟΧΕΙΡΗ ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ 10

ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΕΣ: Ν. Μαρμαρίδης - Α. Μπεληγιάννης

ΒΟΗΘΟΙ ΑΣΚΗΣΕΩΝ: Χ. Ψαρουδάκης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ :

<http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII/LAll.html>

20 - 6 - 2012

Άσκηση 1. Να βρεθούν οι κύριοι άξονες της τετραγωνικής μορφής

$$q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad q(x, y, z) = xy + yz$$

Λύση. Ο πίνακας της τετραγωνικής μορφής q είναι

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A . Έχουμε:

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\lambda & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \cdot (\lambda^2 - \frac{1}{4}) + \frac{\lambda}{4} \\ &= -\lambda \cdot (\lambda^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}) = -\lambda \cdot (\lambda^2 - \frac{1}{2}) = -\lambda \cdot (\lambda - \frac{1}{\sqrt{2}}) \cdot (\lambda + \frac{1}{\sqrt{2}}) \end{aligned}$$

Άρα οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ και $\lambda_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ πολλαπλότητας ένα.

- Για τον ιδιόχωρο $\mathcal{V}(0)$ λύνουμε το παρακάτω ομογενές σύστημα:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} y = 0 \\ z = -x \end{cases}$$

και άρα

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(0) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid y = 0 \text{ και } z = -x \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid x \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid x \in \mathbb{R} \right\} \implies \mathcal{V}(0) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

Υπολογίζουμε: $\|(1, 0, -1)\| = \sqrt{2}$. Τότε το σύνολο

$$\text{ΟΚΒ} : \left\{ \vec{\epsilon}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\}$$

αποτελεί μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{V}(0)$.

- Για τον ιδιόχωρο $\mathcal{V}(\frac{\sqrt{2}}{2})$ έχουμε το ομογενές σύστημα:

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} -\sqrt{2}x + y = 0 \\ x - \sqrt{2}y + z = 0 \\ y - \sqrt{2}z = 0 \end{cases}$$

Από τη πρώτη εξίσωση έχουμε $y = \sqrt{2}x$ και αντικαθιστώντας στη δεύτερη βρίσκουμε: $x - \sqrt{2}\sqrt{2}x + z = 0 \implies x = z$. Συνεπώς

$$\begin{aligned} \mathcal{V}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid y = \sqrt{2}x \text{ και } x = z \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ \sqrt{2}x \\ x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid x \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid x \in \mathbb{R} \right\} \implies \mathcal{V}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

Έχουμε $\|(1, \sqrt{2}, 1)\| = 2$ και άρα μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{V}(\frac{\sqrt{2}}{2})$ είναι το σύνολο:

$$\text{OKB: } \left\{ \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\}$$

- Για τον ιδιόχωρο $\mathcal{V}(-\frac{\sqrt{2}}{2})$ έχουμε το ομογενές σύστημα:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} \sqrt{2}x + y = 0 \\ x + \sqrt{2}y + z = 0 \\ y + \sqrt{2}z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} y = -\sqrt{2}x \\ z = x \end{cases}$$

Τότε

$$\mathcal{V}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \implies \text{OKB: } \left\{ \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\}$$

Επομένως οι κύριοι άξονες της τετραγωνικής μορφής q είναι

$$\left\{ \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\}$$

ή ως διανύσματα του \mathbb{R}^3 , οι κύριοι άξονες της q είναι:

$$\left\{ \vec{e}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \vec{e}_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right), \vec{e}_3 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right) \right\}$$

Τέλος η τετραγωνική μορφή q στους κύριους άξονες γράφεται ως εξής:

$$q(x', y', z') = \frac{\sqrt{2}}{2}(y')^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}(z')^2 \quad \square$$